Université de Lorraine - Site de Metz - UFR MIM **Année 2012/2013**
Master de Mathématiques, année M1
Module *Introduction à l'analyse des données*

Exercices - Feuille 5

Distribution multinormale

1- Distribution mutinormale (1)
1) Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ avec $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$. Montrer que $\Sigma_{12} = 0$ si et seulement si X_1 est indépendant de X_2.
2) Montrer que si $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ et si $A \in \mathbb{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{r,p}(\mathbb{R})$, alors les variables $AX \in \mathbb{R}^q$ et $BX \in \mathbb{R}^r$ sont indépendantes si et seulement si $A\Sigma B^T = 0$.
3) Si $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $A \in \mathbb{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^q$, et $q \leq p$, alors $Y = AX + c$ suit une loi multinormale $Y \sim N_q(A\mu + c, A\Sigma A^T)$.
4) Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ avec $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$. Alors la distribution conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est normale de loi

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim N_{p-r}(\mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_1 - \mu_1), \Sigma_{22,1}) \tag{1}$$

où $\Sigma_{22,1}$ est

$$\Sigma_{22,1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \tag{2}$$

2- Distribution multinormale (2)
Montrer que si $X_1 \sim N_r(\mu_1, \Sigma_{11})$ et si $(X_2 | X_1 = x_1) \sim N_{p-r}(Ax_1 + b, \Omega)$, où Ω ne dépend pas de x_1, alors $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ avec

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ A\mu_1 + b \end{pmatrix} \tag{3}$$

et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11}A^T \\ A\Sigma_{11} & \Omega + A\Sigma_{11}A^T \end{pmatrix} \tag{4}$$

(Indication: appliquer la question 3) de l'exercice précédent)

3- Distribution multinormale (3)
Si

$$X \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \tag{5}$$

et

$$(Y|X) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{6}$$

1) Déterminer la distribution de $Y_2|Y_1$.
2) Déterminer la distribution de $W = X - Y$.

4- Distribution multinormale (4)
On suppose que

$$Z \sim N_1(0,1) \tag{7}$$

$$Y|Z \sim N_1(1+Z,1) \tag{8}$$

$$X|Y,Z \sim N_1(1-Y,1) \tag{9}$$

1) Donner la distribution de $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
2) Donner ls distribution de $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+Z \\ 1-Y \end{pmatrix}$
3) Calculer $E(Y|U=2)$.

5- Distribution de Whishart
Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ une variable aléatoire matricelle telle que $\mathcal{M} \sim W_p(\Sigma, n)$.
1) Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que la v.a. matricielle $\mathcal{B}^T\mathcal{M}\mathcal{B} \in \mathbb{M}_q(\mathbb{R})$ suit une loi $W_q(\mathcal{B}^T\Sigma\mathcal{B}, n)$.
2) Soit $a \in \mathbb{R}^p$ avec $a^T\Sigma a \neq 0$. Montrer que la distribution de $\frac{a^T\mathcal{M}a}{a^T\Sigma a}$ est χ^2_m.